

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס סטטיסטיקה 1. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר [www.gool.co.il](http://www.gool.co.il).



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

## תוכן

3	פרק 1- סטטיסטיקה תיאורית.....
3	סיווג משתנים:.....
20	מדדי מיקום יחסי:.....
27	ניתוח פלטים.....
29	שאלות מסכמות:.....
34	שאלות אמריקאיות על סטטיסטיקה תיאורית:.....
43	פרק 2- קשר בין משתנים.....
43	מדד הקשר הלינארי - קשר בין שני משתנים כמותיים.....
52	פרק 3- בעיות בסיסיות בהסתברות.....
57	פרק 4 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים.....
67	פרק 5 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד.....
70	פרק 6 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד.....
73	פרק 7 - דיאגרמת עצים, נוסחת ביס ונוסחת ההסתברות השלמה.....
79	פרק 8 - תלות ואי תלות בין מאורעות.....
83	פרק 9 - שאלות מסכמות בהסתברות.....
87	פרק 10 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות.....
91	פרק 11 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן.....
95	פרק 12 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית.....
99	פרק 13 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים.....
102	פרק 14 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית.....
107	פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות.....
111	פרק 16 - התפלגות נורמלית.....
115	פרק 17 - שאלות אמריקאיות על כל חומר הלימוד.....

## פרק 1- סטטיסטיקה תיאורית

### סיווג משתנים:

#### רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת. באותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה.

משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים : דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה.

חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

#### מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. **סולם שמי(נומינאלי)** – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות לדוגמה: מצב משפחתי רווק/נשוי/אלמן/גרש; אזור מגורים. משתנה דיכוטומי ( הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשך/לא מעשך.
2. **סולם סדר (אורדינאלי)** – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. **סולם רווחים (אינטרוולי)** – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.
4. **סולם מנה/יחס** – משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

**סוגי משתנים:**

נבצע סיווג של המשתנים :

משתנה איכותי הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.

כמו : מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..)  
מין האדם (זכר, נקבה)  
מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

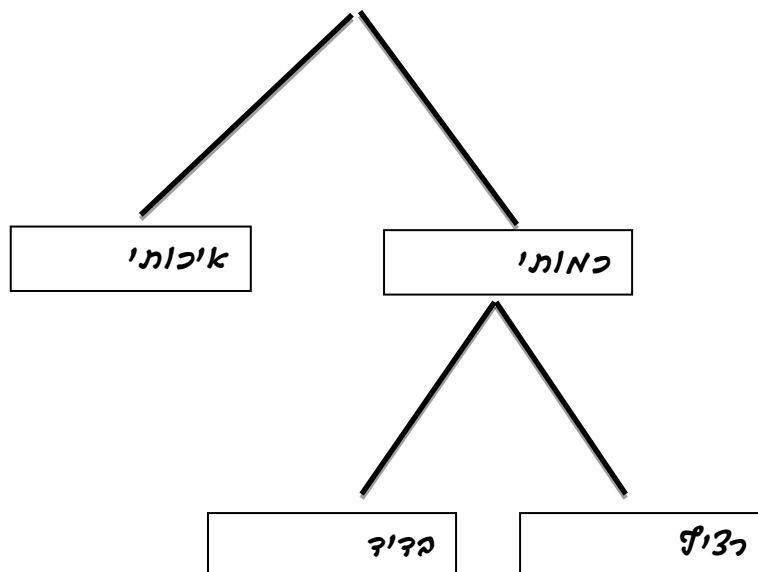
משתנה כמותי הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו : גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים :

משתנה בדיד : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו : מספר ילדים למשפחה (1,2,3..)  
ציון בבחינה (מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1)

משתנה רציף : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים.

כמו : גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (16.233 ס"מ הוא גם גובה אפשרי)  
משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.



## תרגילים:

1. לפניכם רשימה של משתנים:

- א. גובה אדם בס"מ.
- ב. מספר ילדים למשפחה.
- ג. מידת חרדה לפני מבחן.
- ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ 1 עד 7 ( 1 כלל לא מרוצה עד 7 מרוצה מאד)
- ה. השכלה.
- ו. מספר אוטובוס.
- ז. מקום מגורים.
- ח. מין (1=גבר ו-2=אישה).
- ט. מידת נעליים.

ציינו באיזה סולם מדידה המשתנה הנחקר ( שמי , סדר , רווחים או מנה)

2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".

בחברה 200 עובדים.

מספר העובדים	מספר האיחורים
17	0
23	1
85	2
50	3
25	4

- א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
- ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי ? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף? באיזה סולם מדידה המשתנה?

3. לפניכם רשימה של משתנים כמותיים . ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.

- א. שכר עובד בש"ח.
- ב. ציון בחינת בגרות.
- ג. תוצאה בהטלת קובייה.
- ד. מהירות ריצה בתחרות.
- ה. שיעור התמיכה בממשלה.

### הצגת נתונים:

#### רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

א. רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רשמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות:

3 4 3 5 4

ב. טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה - X	שכיחות - $f(X)$	שכיחות יחסית באחוזים
$X_1$	$f_1$	$\frac{f_1}{N} \times 100$
$X_2$	$f_2$	$\frac{f_2}{N} \times 100$
$X_3$	$f_3$	$\frac{f_3}{N} \times 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_k$	$f_k$	$\frac{f_k}{N} \times 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

למשל, להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

$\frac{f_i}{n}$	$F_i$	מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון X
$0.08=2/25$	2	2	5
$0.16=4/25$	6	4	6
$0.32=8/25$	14	8	7
$0.2=5/25$	19	5	8
$0.16=4/25$	23	4	9
$0.08=2/25$	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות:  $F_i$  - השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורצייה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:  $\frac{f_i}{n}$  - איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

ג. טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

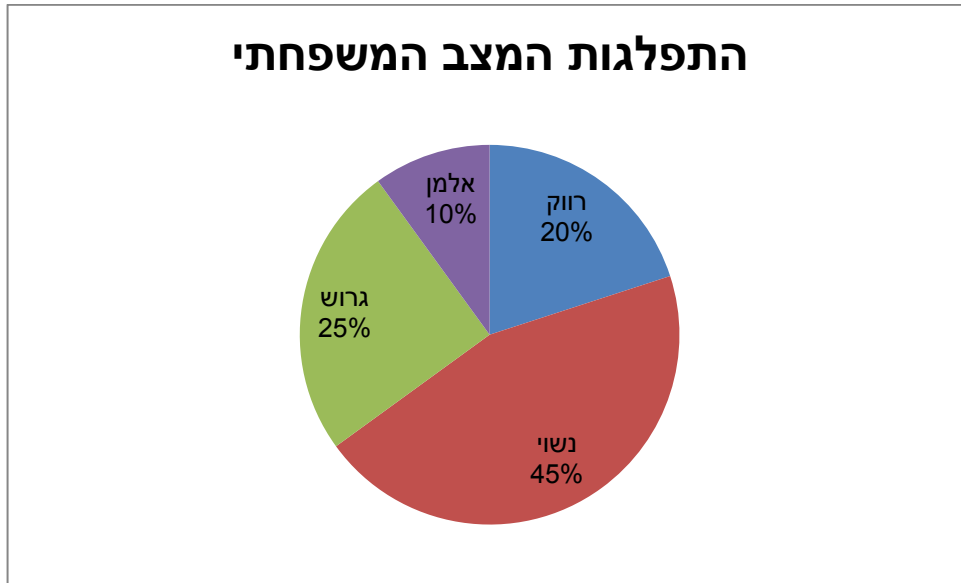
למשל, נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5



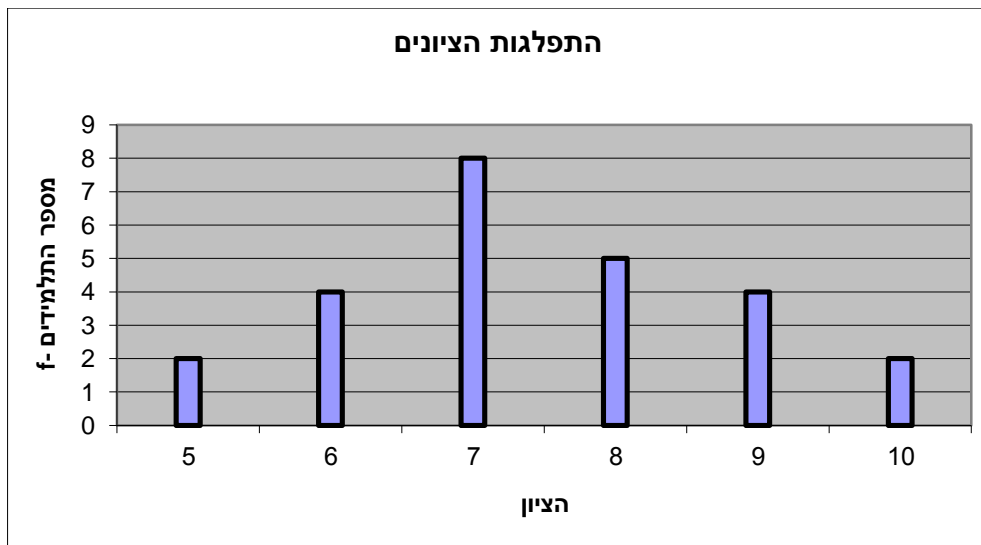
ד. דיאגרמת עוגה :

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח" יחסי מהעוגה. הנתח בעוגה פרופורציוני לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



ה. דיאגרמת מקלות :

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה הציר האנכי של השכיחות – הגובה של המקל מעיד על השכיחות .  
 רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף .  
 כמו כן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

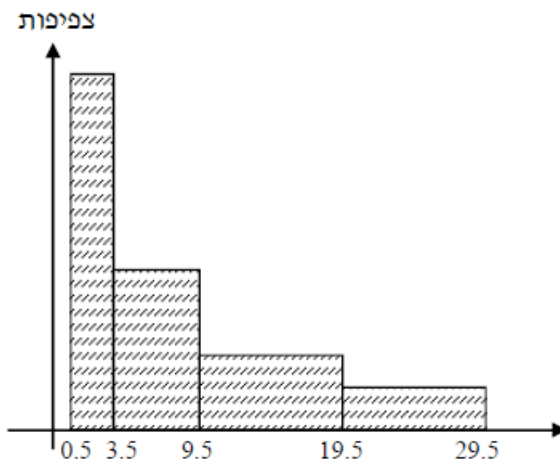


1. היסטוגרמה :

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות. רלבנטית למשתנה כמותי רציף.

בהיסטוגרמה ציר האופקי הוא הציר של המשתנה וציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

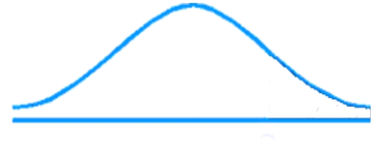
צפיפות	מצטברת	שכיחות	אמצע	רוחב	X
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



פוליגון- מצולעון : אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

### צורות התפלגות נפוצות

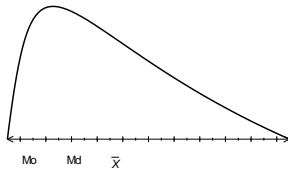
התפלגות סימטרית פעמונית- רוב התצפיות במרכז וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. למשל, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) – רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. למשל, שכר במשק.

התפלגות א-סימטרית  
ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית) רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. למשל, אורך חיים

התפלגות  
א-סימטרית  
שמאלית או  
שלילית



**תרגילים:**

1. בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: : 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו - 25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
- א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2. להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף"

המקצוע	מספר התלמידים
מתמטיקה	44
תני"ך	20
אנגלית	12
היסטוריה	26

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תני"ך?

3. להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

השכלה	מספר העובדים
נמוכה	60
תיכונית	120
אקדמאית	20

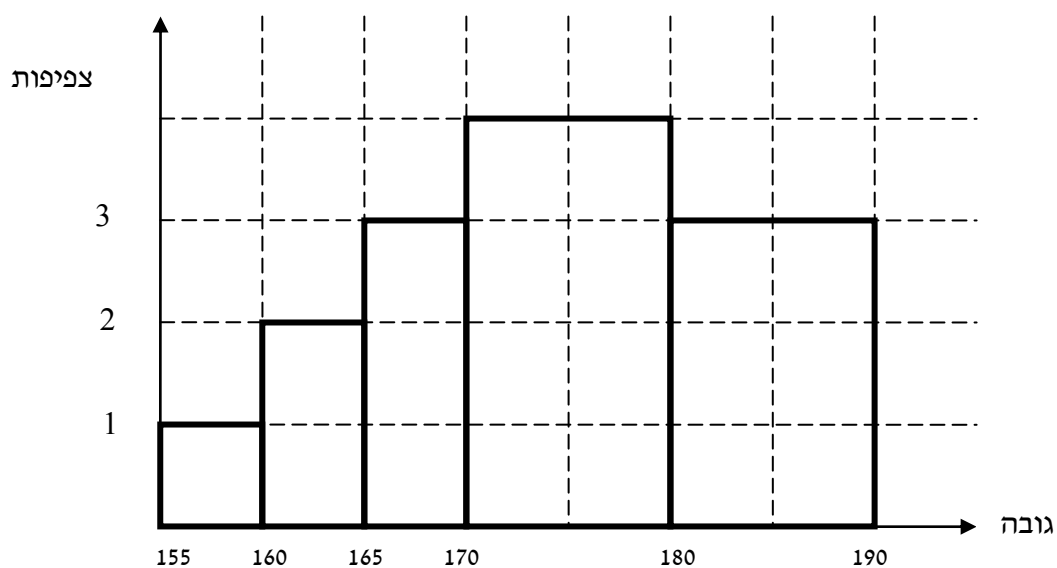
- א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6

- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. תאר את הרשימה בטבלת שכיחויות.
- ג. הוסף שכיחויות יחסיות לטבלה.
- ד. תאר את הנתונים באופן גרפי.

5. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסף שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסף את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

- תאר את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

### מדדי מיקום מרכזי:

#### רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

#### MODE – השכיח

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה: הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים.

בטבלת שכיחויות בדידה: הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

בדיאגרמת מקלות: שיעור ה- $X$  של המקל הגבוה ביותר.

בעוגה: הערך של הפלח הגדול ביותר.

בטבלת שכיחויות במחלקות: המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.

בהיסטוגרמה המחלקה הגבוהה ביותר.

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

#### MEDIAN – החציון

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה: נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה:  $\frac{n+1}{2}$

אם יש מספר זוגי של איברים החציון יהיה הממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$  והאיבר ה- $\frac{n}{2} + 1$

כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = X_{\frac{n+1}{2}}$

ושיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

בטבלת שכיחויות בדידה: נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

בטבלת שכיחויות במחלקות: המחלקה החציונית היא המחלקה שמיקומה  $\frac{n}{2}$

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

**הממוצע :**

הנו מרכז הכובד של ההתפלגות.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} : \text{ברשימה}$$

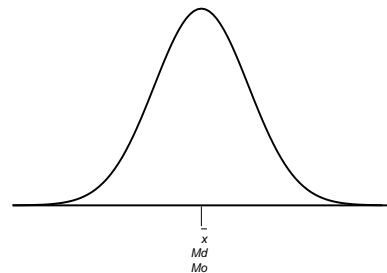
$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n} : \text{בטבלת שכיחויות}$$

**במחלקות:** נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה  $X$ . הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב ולא אמיתי. הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

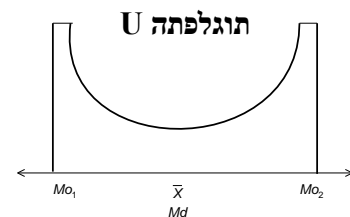
$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_j n_j}{N} : \text{ממוצע משוקלל}$$

**מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:**

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה :

**התפלגות סימטרית**

בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז :

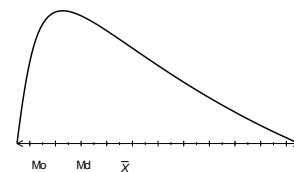


בהתפלגות אסימטרית

התפלגות  
א-סימטרית  
שמאלית או  
שלילית



התפלגות א-סימטרית  
ימנית או חיובית



**תרגילים:**

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6  
חשב את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2. בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8  
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 4, 3, 4, 5.

א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?

ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר מקלטים	מספר משפחות
0	22
1	28
2	18
3	22
4	10

ג. חשב את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.

ד. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחיבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

4. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?

ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?

ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!



5. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בקייג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

א. מהי המחלקה השכיחה והחציונית.

ב. חשב אומדן למוצע.

ג. האם היה ניתן לדעת מהי התשובה לסעיף ב ללא חישוב? הסבר

6. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

מס' תלמידים	ממוצע	כיתה
40	76	1
20	68	2
30	82	3

חשב את הממוצע המשוקלל בשכבה.

#### פתרונות:

#### שאלה 1

החציון: 7

השכיח: 6

הממוצע: 6.9

#### שאלה 2

א. 3

ב. שכיח: 3,4 חציון: 4

#### שאלה 3

א. הממוצע: 1.7

החציון: 1.5

השכיח: 1

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

#### שאלה 4

א. 630

ב. 34.13%

ג. שכיח וחציון: 3 ממוצע: 2.952

#### שאלה 6

76.22

**מדדי פיזור:****רקע:**

המטרה : למדוד את הפיזור של הנתונים כלומר כמה הם רחוקים זה מזה.

**הטוחותחום RANGE:**

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר :  $R = X_{\max} - X_{\min}$

**טוח בין רבעוני Inter Quartile Range - IQR**

הטוח שבין הרבעון התחתון (אחוזון 25) עד הרבעון העליון (אחוזון 75).  
הרבעון התחתון מסומן ב-  $Q_1$  והרבעון העליון מסומן ב-  $Q_3$ . הטוח הבין רבעוני הוא :

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

הטוח הבין רבעוני נותן אינדיקציה על הטוח של 50% התצפיות המרכזיות.

**שונות וסטיית תקן:**

השונות היא ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע :

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad \text{עבור סדרת נתונים}$$

סטיות התקן - Standard deviation

על-מנת לקבל תוצאה בממדי הבעיה נחשב את שורש השונות ונקבל את **סטיית התקן**.

נסמן סטיית תקן ב-  $\hat{S}(x)$  ונחשב באמצעות  $\hat{S}(x) = \sqrt{\hat{S}^2(x)}$ .

חישוב שונות וסטיית תקן בטבלת שכיחויות :

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\sum_x (x - \bar{x})^2 f(x)}{n-1}$$

**תרגילים:**

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6  
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.
2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. חשבו סטיית התקן.  
ב. חשבו את הטווח ואת הטווח הבין-רבעוני של הנתונים.
- הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!
3. בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.
- א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?  
ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?  
ג. ובדומה אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?
4. נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע:  
2, 3, 2, 1. חשב את השונות של חמש התצפיות.

**פתרונות:**

<b>שאלה 1</b>	<b>שאלה 2</b>
השונות: 2.305	א. סטיית תקן: 1.106
סטיית תקן: 1.518	ב. טווח: 4 טב"ר: 2
טווח: 6	
<b>שאלה 3</b>	<b>שאלה 4</b>
א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן	א. תשובה: 13.5

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל

## מדדי מיקום יחסי:

### רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמות יחסית לשאר התצפיות בהתפלגות.

א. ציון תקן:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\hat{S}}$$

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא:

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע.

כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע.

ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.

ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.

ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

ב. אחוזונים/מאונים.

האחוזון- $p$  הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש  $p\%$  מהנתונים.

מסמנים את האחוזון ה- $p$  -  $X_p$ .

### חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלה

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה

ל- $p\%$ .

**תרגילים:**

1. תלמידי כיתה ח' נגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.  
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו70 במתמטיקה.

א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?  
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.  
ב. האחוזון ה-30.  
ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.  
ד. רבעון עליון.

**פתרונות:****שאלה 2**

- א. 1  
ב. 2  
ג. 4  
ד. 4

**שאלה 1**

- ג. לשון  
ד. תשובה: 72

**מקדם ההשתנות****Coefficient of Variation – מקדם ההשתנות**

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל). על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע הנתונים נחשב את **מקדם ההשתנות - Coefficient of Variation** :

$$CV = \frac{\hat{S}(X)}{\bar{X}}$$

ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע וככל שמקדם ההשתנות גבוהה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.

**תרגילים:**

1. להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

2. נתונות שתי קבוצות:

הממוצע בקבוצה א 100 והשונות 100.

הממוצע בקבוצה ב 500 והשונות 400.

באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

**פתרונות:****שאלה 2**

קבוצה 2

**שאלה 1**

ב. כיתה ב

### טרנספורמציה לינארית:

#### רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה של קבוע ( או החסרה ) והכפלה של קבוע ( או חילוק ) לכל

$$y = b \cdot x + a \quad \text{התצפיות:}$$

וכך יושפעו המדדים השונים:

$$Mo_y = b \cdot Mo_x + a$$

$$\bar{y} = b \cdot \bar{x} + a$$

$$Md_y = b \cdot Md_x + a$$

$$y_p = b \cdot x_p + a$$

$$\hat{s}_y = |b| \hat{s}_x$$

$$\hat{s}_y^2 = b^2 \hat{s}_x^2$$

$$IQR_y = |b| IQR_x$$

$$R_y = |b| R_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית ( שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נירשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי  $a$  ו  $b$ .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

**תרגילים:**

1. עבור סדרת נתונים התקבל:

$$\bar{X} = 80$$

$$\hat{S} = 15$$

$$MO = 70$$

הוחלט להכפיל את כל התצפיות פי-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשב את המדדים הללו לאחר השינוי.

2. בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

**פתרונות:****שאלה 2**

הממוצע: 46

השונות: 30.25

**שאלה 1**

הממוצע: 315

סטיית התקן: 60

השכיח: 275

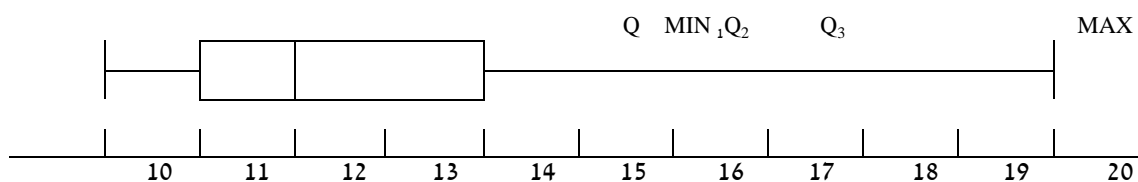


## תרשים קופסא - boxplot

### רקע:

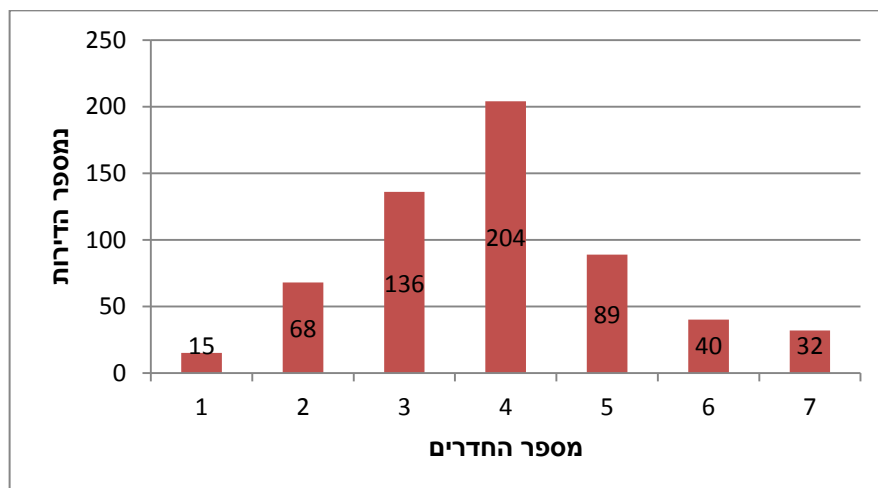
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון:

1. את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון ( $Q_2$ )
2. את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני)
3. את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית)



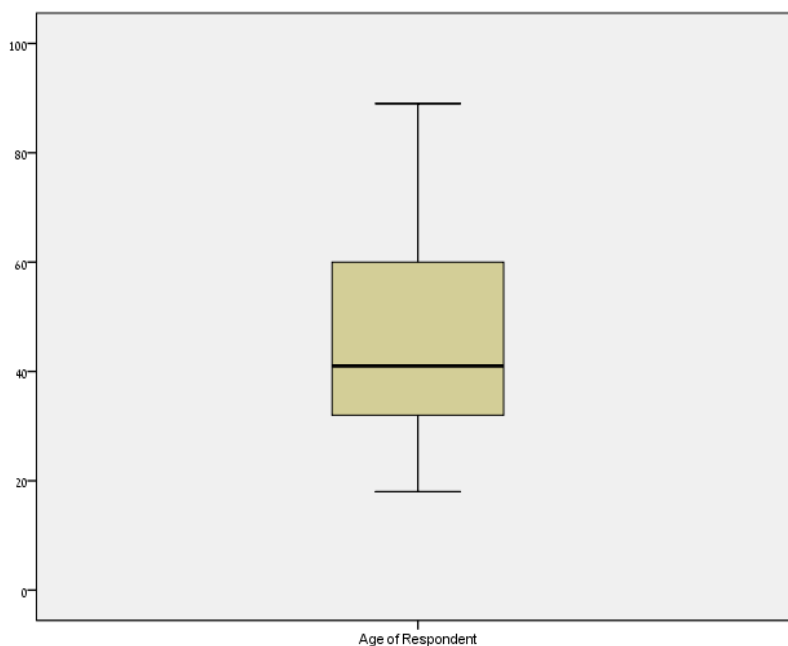
### תרגילים:

1. להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד.



- א. מצא את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
- ב. שרטט דיאגרמת קופסא להתפלגות.
- ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2. להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל בשנים באוכלוסייה מסויימת:



- א. מהו בערך הגיל החציוני באותה אוכלוסייה?  
 ב. מה בערך טווח הגילאים?  
 ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

### פתרונות:

#### שאלה 2

חציון 40  
 טווח 70  
 התפלגות אסימטרית ימנית

#### שאלה 1

- א. חציון 4  
 רבעון תחתון 3  
 רבעון עליון 5  
 ב. כמעט סימטרית

## ניתוח פלטים

1. להלן פלט על התפלגות הגילאים באוכלוסייה מסוימת.

		Statistic
Age of Respondent	Mean	45.63
	Median	41.00
	Variance	317.140
	Std. Deviation	a
	Minimum	18
	Maximum	b
	Range	71
	Interquartile Range	28

- א. מצא את הערכים בטבלה המסומנים ב a ו b .  
 ב. נתון שההתפלגות היא אסימטרית האם היא נוטה ימינה או שמאלה?

2. להלן התפלגות ההשכלה של העובדים בחברת "מתאר":

years of education					
		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	8.00	7	12.7	12.7	12.7
	9.00	4	7.3	7.3	20.0
	10.00	2	3.6	3.6	23.6
	11.00	14	25.5	25.5	49.1
	12.00	10	18.2	18.2	67.3
	13.00	2	3.6	3.6	70.9
	14.00	4	7.3	7.3	78.2
	15.00	7	12.7	12.7	90.9
	16.00	4	7.3	7.3	98.2
	18.00	1	1.8	1.8	100.0
	Total		55	100.0	100.0

		Statistic
years of education	Mean	?
	Median	12.0000
	Variance	?
	Std. Deviation	2.54786
	Minimum	?
	Maximum	?
	Range	?
	Interquartile Range	?

מלא את הערכים המסומנים בסימני שאלה.

**פתרונות:**

**שאלה 2**

הממוצע: 11.909

שונות: 6.492

טווח: 10

טב"ר: 3

**שאלה 1**

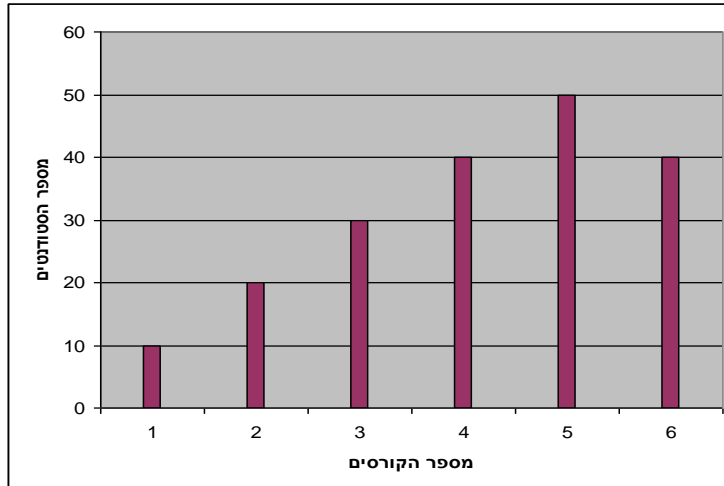
א.  $a=17.81$

$b=89$

ב. אסימטרית ימנית

## שאלות מסכמות:

1. בפקולטה להנדסה אספה מזכירות הסטודנטים נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008.  
להלן התוצאות שהתקבלו:



- א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?  
 ב. מהי צורת ההתפלגות?  
 ג. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות.  
 ד. חשב את השכיח, החציון והטווח.

2. להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'. השתתפו במחקר 150 תלמידים.

$$\text{ממוצע הציונים שהתקבל: } \bar{X} = 7 \frac{1}{15}$$

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- א. השלם את השכיחויות החסרות בטבלה.  
 ב. חשב את הציון החציוני, השכיח.  
 ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.  
 ד. הוחלט לשנות את סקלת הציונים ולהכפיל את הציון ב-10. למשל, ציון 8 יהפוך להיות 80. מה הממוצע ומהי השונות של הציונים בסקלה זו?

3. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".  
בחברה 200 עובדים.

שכיחות	שכיחות יחסית (פרופורציה)	מספר האיחורים
	15%	0
	20%	1
	30%	2
	20%	3
		4

- א. השלם את הטבלה.
- ב. חשב את החציון, השכיח, והממוצע של התפלגות.
- ג. מהי סטיית התקן של ההתפלגות.
- ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- ה. מהו הטווח והטווח הבין רבעוני?
- ו. מה ציון התקן של רינה שאיחרה פעמיים?
- ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מסתבר שאלה שאיחרו 4 פעמים בפועל איחרו 3 פעמים? הסבר.

4. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 – שביעות רצון נמוכה ועד 5 שביעות רצון גבוהה) להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?  
 ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?  
 ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?  
 i. היסטוגרמה.  
 ii. דיאגרמת מקלות.  
 iii. דיאגרמת עוגה  
 ד. חשבו את המדדים הבאים:  
 1. טווח  
 2. שכיה  
 3. חציון

#### פתרונות:

- | <u>שאלה 2</u>   | <u>שאלה 1</u>                       |
|---|-------------------------------------|
| א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8. | א. מספר הקורסים. בדיד.              |
| ב. החציון: 7  | ב. התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית) |
| השכיה: 8  | ד. השכיה: 5                         |
| ג. השונות: 2.533                                      | הטווח: 5                            |
| סטיות התקן: 1.592                                     | החציון: 4                           |
| ד. הממוצע: 70.67                                      |                                     |
| השונות: 253.3   |                                     |



שאלה 3

ב. החציון : 2

השכיח : 2

הממוצע : 2

ג. סטיית תקן : 1.27

ד. תשובה : 4

ה. טווח : 4 טב"ר : 2

ו. תשובה : 0

ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יקטן  
וסטיית התקן תקטן.שאלה 4

א. תשובה : 20%

ב. שביעות רצון (סדר)

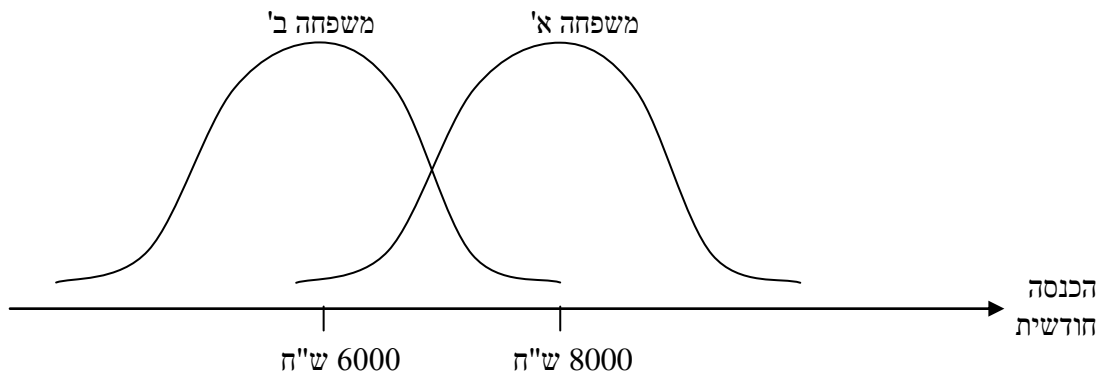
ג. תשובה : 2

ד. טווח : 4 שכיח : 2 חציון : 2.5

## שאלות אמריקאיות על סטטיסטיקה תיאורית:

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



### שאלה 1

לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?

- א. משפחה א'
- ב. משפחה ב'
- ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה
- ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

### שאלה 2

באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?

- א. משפחה א'
- ב. משפחה ב'
- ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת
- ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

### שאלה 3

באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?

- א. משפחה א'
- ב. משפחה ב'
- ג. לשתיהן אותה סטית תקן
- ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:

$f(x)$	$x$
?	0
10	1
6	2
15	3
?	4
50	סה"כ

כמו כן נתון: הממוצע הוא 1.66

#### שאלה 4

השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0
- ב. 15
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

#### שאלה 5

חציון הנתונים הוא:

- א. 2
- ב. 1.5
- ג. 25.5
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

#### שאלה 6

הטווח של הנתונים

- א. 11
- ב. 3
- ג. 4
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של הטווח.

## שאלה 7

בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי
- ב. חיובי
- ג. אפס
- ד. לא ניתן לדעת ללא ידיעת הנתונים.

## שאלה 8

סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה - 40 ושונות הסדרה - 100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה: 50 ו-30.

השונות של 12 התצפיות היא:

- א. תקטן
- ב. תגדל
- ג. לא תשתנה
- ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10**

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ש"ח וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ש"ח. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5 לרווחיות

**שאלה 9**

מהי המשכורת הממוצעת החדשה :

- א. 2,300 .
- ב. 6,900 .
- ג. 4,650 .
- ד. 4,600 .
- ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

**שאלה 10**

מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר ?

- א. 200 .
- ב. 300 .
- ג. 675 .
- ד. לא ניתן לדעת

**שאלה 11**

הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

- א. תגדיל את סטיית התקן.
- ב. תקטין את סטיית התקן.
- ג. לא תשנה את סטיית התקן.
- ד. לא ניתן לדעת.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-14**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה :

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

### שאלה 12

התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא :

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

### שאלה 13

פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא :

- א. 80.55
- ב. 65
- ג. 80
- ד. 81.66

### שאלה 14

איזו כיתה היא ההומוגנית ביותר . הכיתה של

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-18 :

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד נמצא ש :

7	6	5	4	3	2	1	0	שוקולד פגום
8	10	11	13	12	48	63	35	מסי' קופסאות

### שאלה 15

מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא :

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 4.
- ד. לא ניתן לדעת.

### שאלה 16

מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא ?

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 3.
- ד. 4.
- ה. לא ניתן לדעת.

### שאלה 17

מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה :

- א. סדר.
- ב. שמי.
- ג. כמותי בדיד
- ד. כמותי רציף

### שאלה 18

השכיח של מספר הפגומים בקופסא :

- ה. 63
- ו. 1
- ז. 200
- ח. לא ניתן לדעת.

## שאלה 19

ביחס לציר המספרים רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:

- א. בערכים הגבוהים.
- ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ג. בערכים הנמוכים.
- ד. לא ניתן לדעת.
- ה. אף לא תשובה מהנייל נכונה.

## שאלה 20

בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת. החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר:

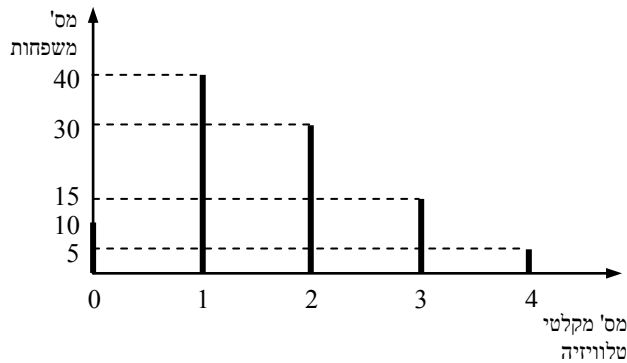
- א. השכיחות ב 2 החברות זהה אך שונה מ 8.
- ב. השכיח ב 2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
- ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
- ד. שכיח בחברה אחת שונה מ 8 ובשנייה הוא 8.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 21 עד 25

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.

תוצאות הסקר נתונות

בדיאגרמת מקלות הבאה:



## שאלה 21

המשתנה הנחקר כאן הוא:

- א. משתנה שמי.
- ב. משתנה מסולם סדר.
- ג. משתנה כמותי בדיד.
- ד. משתנה כמותי רציף.



**שאלה 22**

הטווח של ההתפלגות הוא :

א. 35

ב. 4

ג. 3

ד. 2

**שאלה 23**

ממוצע מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה הוא :

א. 1.65

ב. 1.5

ג. 1

ד. 2

**שאלה 24**

השכיח של התפלגות זו היא :

א. 40

ב. 1.5

ג. 1

ד. 2

**שאלה 25**

מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלויזיה. ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

א. יקטין אותו.

ב. יגדיל אותו.

ג. לא ישנה אותו.

ד. אין לדעת

**פתרונות:**

שאלה	תשובה
1	א
2	ג
3	ג
4	ג
5	ב
6	ג
7	א
8	ג
9	ב
10	ב
11	ג
12	ה
13	ד
14	ג
15	ב
16	א
17	ג
18	ב
19	ג
20	ה
21	ג
22	ב
23	א
24	ג
25	ב

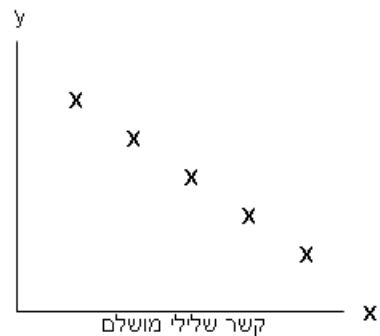
## פרק 2- קשר בין משתנים

### מדד הקשר הלינארי - קשר בין שני משתנים כמותיים

#### רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. בדרך כלל,  $X$  הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו  $Y$  הוא המשתנה המוסבר (התלוי). למשל, נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד  $X$  מסבירה את ההכנסה שלו  $Y$ . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.



בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. הממד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שנראה בשלב הראשון רק בעין.

המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי).

ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).

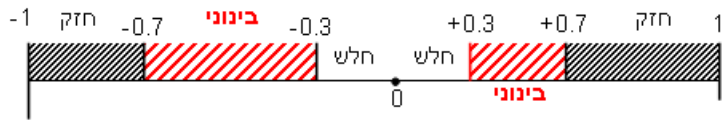
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה:  $y = bx + a$ .

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $b$  יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $b$  שלילי (מקדם מתאם -1).

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל-Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל-Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.



מקדם המתאם יסומן באות  $r$ .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1} : \text{שונות משותפת}$$

$$\hat{S}_x^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} : \text{שונות של המשתנה X}$$

$$\hat{S}_y^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} : \text{שונות המשתנה Y}$$

$$r_{x,y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{S}_x \cdot \hat{S}_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

בשלב השלישי, במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים נהוג לבצע ניבויים. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר.

מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X. השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a- בעצם נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא ניקרא החותך של הקו.  
b- הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.  
להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה:

$$\tilde{Y} = bX + a$$

$$b = r \frac{\hat{S}_y}{\hat{S}_x}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

#### טרנספורמציה לינארית והשפעתה על מקדם המתאם

טרנספורמציה לינארית בין אם נעשית על X ובין אם נעשית על y, או בין אם נעשית על שניהם, אינה משנה את עוצמת הקשר. היא עלולה רק לשנות את כיוונו אם השיפועים של שתי הטרנספורמציות שוני סימן.

**תרגילים:**

1. להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
2	80
1	90
0	90
2	70
3	70
4	50

- א. שרטט דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשב את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2. נסמן ב- $X$  את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- $Y$  את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \quad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין  $X$  ל- $Y$ . מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מצא את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבר את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
- ג. משפחת כהן הכניסה 15,000 ₪, מה ההוצאה הצפויה שלה?

3. נסמן ב- $X$  את ההשכלה של אדם בשנות למוד. נסמן ב- $Y$  את הכנסתו באלפי ₪.

במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$\hat{S}_y = 5 \quad \hat{S}_x = 2$$

$$\bar{Y} = 8 \quad \bar{X} = 14$$

$$COV(X, Y) = 7.5$$

א. חשב את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.

ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?

ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000 ₪?

ד. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

4. מבחן בנוי מחלק כמותי ומחלק מילולי. ממוצע הציון בחלק המילולי הנו 100 עם סטית תקן 20 ובחלק הכמותי ממוצע הציון 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין שני הציונים הוא 0.9.

א. חשבו את השונות המשותפת בין ציוני שני חלקי הבחינה.

ב. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב-20%, מה יהיה מקדם המתאם בין הציון המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?

ג. נגדיר משתנה חדש  $W$  להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי

בבחינה-150. מצא את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- $W$  ובין  $W$  ל-ציון הכמותי.

5. להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל  $\bar{X} = \bar{Y} = 6$   $S_x = S_y = 1$  לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$  הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

6. במחקר רצו לבדוק את הקשר בין גודל המנוע של מכונית (Engine size) לבין כוח הסוס שלו (Horsepower) להלן הפלט שהתקבל:

	Mean	Std. Deviation	N
Horsepower	185.95	56.700	156
Engine size	3.061	1.0447	156

		Horsepower	Engine size
Horsepower	Pearson Correlation	1	.837**
	Sig. (2-tailed)		.000
	Sum of Squares and Cross-products	498313.590	7687.787
	Covariance	3214.926	49.599
	N	156	156
Engine size	Pearson Correlation	.837**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	Sum of Squares and Cross-products	7687.787	169.151
	Covariance	49.599	1.091
	N	156	156

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- א. מצא את קו הניבויים לניבוי כוח הסוס על סמך גודל המנוע.
- ב. מה יהיה הניבוי לכוח הסוס של מכונית עם גודל מנוע 3?
- ג. איזו התפלגות יותר הומוגנית. זו של התפלגות כוח הסוס של המכונית או זו של גודל המנוע? הסבר באמצעות חישוב.

7. במחקר רפואי רצו לבדוק האם קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים.

להלן הפלט שהתוכנה הוציאה :

	Mean	N
X	16.00	5
Y	15.40	?

		X	Y
X	Pearson Correlation	1	?
	Sum of Squares and Cross-products	44.000	49.000
	Covariance	11.000	?
	N	5	5
Y	Pearson Correlation		1
	Sum of Squares and Cross-products	49.000	59.200
	Covariance	12.250	14.800
	N	5	5

- א. מלא את המספרים החסרים בפלט ( במקום סימני השאלה).  
 ב. מצא את קו הניבוי לניבוי ההורמון Y על סמך ההורמון X.  
 ג. התברר ונפלה טעות ויש להוסיף 1 לכל ערכי ה-X. חזור על סעיף הקודם לאחר השינוי.



## קשר בין שני משתנים איכותיים

### רקע

כשנרצה לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים איכותיים. נבנה טבלת שכיחות משותפת. נזהה את המשתנה הבלתי תלוי והמשתנה התלוי. כל קטגוריה של המשתנה הבלתי תלוי תהיה 100% לפי ההתפלגות של המשתנה התלוי. אם נראה לפחות פעם אחת פער שגדול מ 5% נאמר שיש קשר בין שני המשתנים. ניתן גם להמחיש זאת על ידי שרטוט של דיאגרמת מקלות. בציר האופקי אנו מציבים את המשתנה התלוי. בציר האנכי אנו מציבים את אחוז השכיחות היחסית.

### תרגילים:

1. להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין לדעה מסוימת. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו ודעתו האישית בדבר סוגיה מסוימת. הנחקרים היו צריכים לענות האם הם בעד, נמנעים או נגד הסוגיה שהוצגה להם. להלן התוצאות:

דעה	מין		
	נגד	נמנע	בעד
גבר	20	40	120
אישה	80	20	20

- א. מהו המשתנה הבלתי תלוי ומהו המשתנה התלוי?  
 ב. האם ניתן להגיד שבקרב הגברים יש נטייה בולטת יותר להיות בעד החוק?  
 ג. האם קיים קשר בין מין לדעה? הסבר.
2. נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
- א. בנה טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.  
 ב. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי?  
 ג. האם קיים קשר בין המשתנים? הסבר.  
 ד. תאר את הנתונים על ידי דיאגרמת מקלות מתאימה.

### קשר בין משתנה איכותי למשתנה כמותי

#### רקע

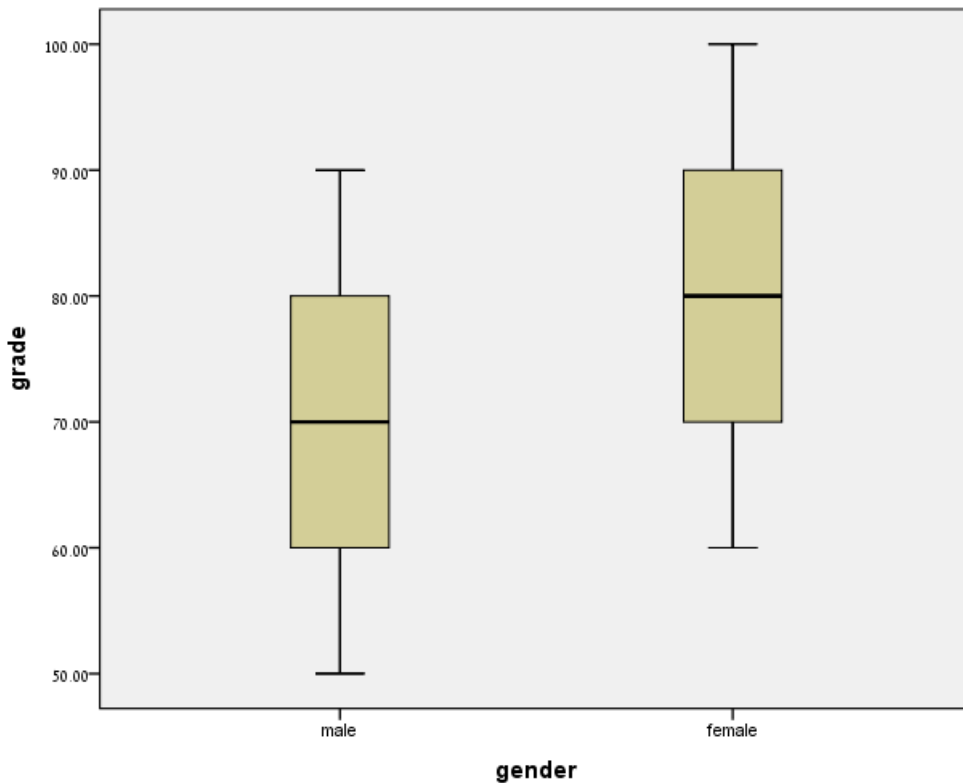
אם משתנה אחד הוא כמותי ואחד הוא איכותי ניתן לבצע השוואה בין המשתנים על ידי השוואות של תרשימי קופסה.

עבור כל ערך של המשתנה האיכותי נשרטט תרשים קופסה באותה מערכת צירים. ניתן להשוות בין תרשימי הקופסה באספקטים הבאים:

1. מרכז ההתפלגות (חציון)
2. פיזור (טווח בין רבעוני)
3. צורת ההתפלגות (סמטרית, אסמטרית ימנית או אסמטרית שמאלית)

#### תרגיל:

במטרה לבדוק האם קיים קשר בין המין לציונים בבחינה שרטטו את תרשימי הקופסה הבאים:



- א. מהי צורת ההתפלגות של הציונים בקרב הגברים?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של התפלגות הציונים בקרב הגברים?
- ג. מהם המשתנים הנחקרים בשאלה? מיהו הבלתי תלוי ומיהו התלוי?
- ד. האם קיים הבדל בצורת ההתפלגות של הציונים בין גברים לנשים?
- ה. האם קיים הבדל במידת הפיזור של הציונים בין גברים לנשים?
- ו. האם יש השפעה של המין על הציונים?

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

פתרונות:מדד הקשר של פירסון – מדד הקשר הלינארישאלה 1

א. בהקלטה

ב.  $-0.9325$ שאלה 2

א. 0.8

ב.  $\tilde{Y} = 0.8X + 0.4$ 

ג. 12.4

שאלה 4

א. 270

ב. בין הציון המילולי הישן לחדש: 1:

בין הציון המילולי החדש לכמותי: 0.9:

ג. בין W לציון המילולי: -1

בין W לציון הכמותי: -0.9

שאלה 3

א. 0.75

ב. 4.25 אלפי ש"ח

שאלה 6א.  $\tilde{Y} = 45.43X + 46.89$ 

ב. 183.18

ג. כוח סוס

שאלה 5

ג. לא נכון

ד. נכון

שאלה 7

א. בהקלטה

ב.  $\tilde{Y} = 1.11X - 2.36$ קשר בין שני משתנים איכותייםשאלה 1

א. המין הוא הבלתי תלוי

ב. כן

ג. כן

שאלה 2

א. בהקלטה

ב. הבלתי תלוי הוא פעילות הגופנית.

ג. כן

ד. בהקלטה

קשר בין משתנה איכותי לכמותי.שאלה 1

א. סימטרית

ב. טווח 40 טווח בין רבעוני 20

ג. המין הוא הבלתי תלוי.

ד. לא

### פרק 3 - בעיות בסיסיות בהסתברות

#### רקע :

**ניסוי מקרי :** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.  
למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

**מרחב מדגם :** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה :  $\{1,2,3,4,5,6\}$ .  
מזג האוויר בעוד שבועיים :  $\{ \text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך} \}$

**מאורע :** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות :  $A, B, C, \dots$

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$   
לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

**גודל מרחב המדגם :** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה :  $|\Omega| = 6$

**גודל המאורע :** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה :  $|A| = 2$        $|B| = 3$

**מאורע משלים :** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה :  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$        $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

**מרחב מדגם אחיד ( סימטרי ) :** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד :**

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה :  $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5 ?  $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית ?  $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד :**

יחושב לפי השכיחות היחסית :  $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון-X
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8 ?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

**הסתברות למאורע משלים :**

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

**תרגילים:**

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- הרכב את כל המילים האפשריות.
  - רשום את המקרים למאורע:
    - A - במילה נמצאת האות E.
    - B - במילה האותיות שונות.
    - ג. רשום את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .
2. מטילים זוג קוביות.
- רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
  - רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
    - A - סכום התוצאות 7.
    - C - מכפלת התוצאות 12.
  - ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
  - ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
  - ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
  - ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
  - ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

**פתרונות:****שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$

**שאלה 3**

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

**שאלה 4**

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32



## פרק 4 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

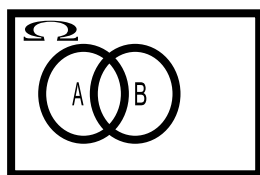
רקע:

פעולת חיתוך:

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך:

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$

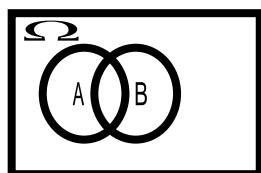
לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולת איחוד:

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא:  $A \cup B$  נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :  $A = \{5, 6\}$

לקבל תוצאה זוגית :  $B = \{2, 4, 6\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

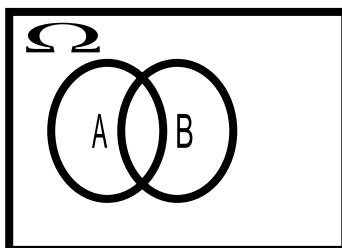
דוגמה ( הפתרון נמצא בהקלטה )

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

- א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?  
 ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?  
 ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

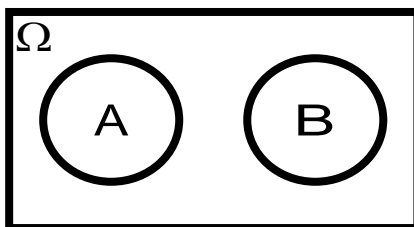
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם :

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם :

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים : מאורעות שאין להם מהמשותף: לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{\}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

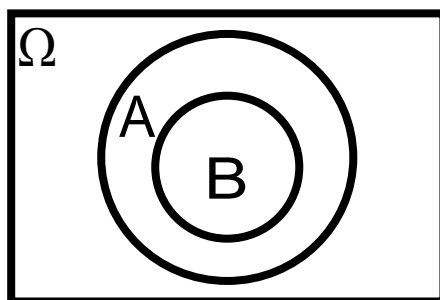
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad \text{: לקבל לפחות 5}$$

$$B = \{3\} \quad \text{: לקבל 3}$$

$$A \cap B = \{\}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא:  $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

**תרגילים:**

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים :
- E- במילה נמצאת האות E.  
 F- במילה אותיות שונות.  
 א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.  
 ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.
2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים :
- A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.  
 B- לעבור את המבחן בכלכלה.  
 העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים :
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.  
 ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.  
 ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.  
 ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.  
 ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.  
 ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :
- $A =$   
 $B =$   
 $\bar{B} =$   
 $A \cap B =$   
 $A \cup B =$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב-  $\Omega$  את מרחב המדגם וב-  $\phi$  קבוצה ריקה.  
 נתון כי  $A$  הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.  
 להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא  $\Omega$  או  $\phi$  או  $A$ .  
 קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\bar{A} \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים :  
 $A =$  אדם שגובהו מעל 1.7 מטר  
 $B =$  אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר  
 קבע את גובהם של האנשים הבאים :

א.  $A \cap B$

ב.  $A \cup B$

ג.  $\bar{A} \cap B$

ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה.  $\bar{A}$

6. נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים :

A- בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B- סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C- מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את  $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים :

A- קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B- קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?



$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל-  $P(A \cap B)$

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו- B מאורעות זרים. נתון ש:  $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א.  $A \cap B = B \cap A$

ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17. נתון ש A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש  $P(A) = 0.3$  ו-  $P(B) = 0.2$

א. האם יתכן ש-  $p(A \cup B) = 0.4$  ?

ב. האם יתכן ש-  $p(A \cup B) = 0.6$  ?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי  $p(A \cup B)$  ?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי  $p(A \cup B)$  ?

**פתרונות:****שאלה 7**

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

**שאלה 8**

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

**שאלה 9**

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

**שאלה 10**

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

**שאלה 11**

א. כן

ב. 0.3

**שאלה 12**

התשובה הנכונה ג

**שאלה 13**

א. 0.05

ב. 0.95

**שאלה 14**

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

## פרק 5 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו אשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש B כבר קרה:

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמרחב המדגם אחיד:}$$

למשל, (פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה.

נגדיר:

A – התוצאה זוגית.

B – התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את:

$$P(A|B)$$

**תרגילים:**

1. נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
2. יוסי הטיל קובייה. מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4 אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית ?
3. מטילים צמד קוביות.  
נגדיר :  
 $A$  – סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7  
 $B$  – מכפלת התוצאות 12  
חשבו את  $P(A|B)$ .
4. הוטל מטבע פעמיים. ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים ?
5. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל שהתוצאות זהות. מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
6. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל לפחות פעם אחת 4. מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
7. נבחרה משפחה בת שני ילדים. ידוע שאחד הילדים בן. מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
8. נבחרה משפחה בת שלושה ילדים. נתון שהילד האמצעי בן. מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

**פתרונות:****שאלה 1**

0.2

**שאלה 2**

1/3

**שאלה 3**

0.5

**שאלה 4**

0

**שאלה 5**

1/6

**שאלה 6**

2/11

**שאלה 7**

1/3

**שאלה 8**

3/4

## פרק 6 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

### רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.  
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

## תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :  
 נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה.  
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9.  
 הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
  - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
  - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
  - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
  - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
  - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?
  
2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".  
 ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
  - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
  - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
  - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
  - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
  
3. במכללה שני חניונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
  - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
  - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
  - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
  - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?
  
4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
  - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
  - ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
  - ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
  - ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
  - ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
  - ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

**פתרונות:****שאלה 1**

- א. 0.833  
 ב. 0.9375  
 ג. 0.0625  
 ד. 0.5  
 ה. 0.789

**שאלה 2**

- א. 5%  
 ב. 0.0833  
 ג. 0.786  
 ד. 0.6875

**שאלה 3**

- א. 0.4  
 ב.  $\frac{2}{3}$   
 ג. 0.25  
 ד.  $\frac{6}{7}$



## פרק 7 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

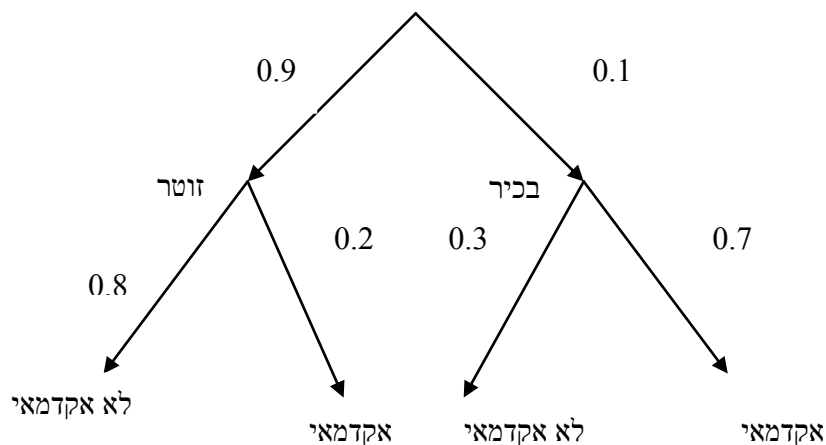
### רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.  
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.  
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(\text{zutar} | \text{academay}) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

### נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו,  $A_1, \dots, A_n$  חלוקה ממצה של  $\Omega$ .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad \text{אזי:}$$

### נוסחת בייס

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

### תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון . מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת , אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
  - א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון ?
  - ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?
  
2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
  - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
  - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
  - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
  - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
  
3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
  - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
  - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
  
4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי :
  - 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
  - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
  - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
  - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלה מסוימת את התשובה הוא  $p$ , אם הוא

לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאלה יש  $k$  תשובות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

פתרונות:שאלה 1א.  $2/7$ ב.  $23/49$ שאלה 2

א. 6%

ב. 58%

ג. 0.241

ד. 0.2

שאלה 3

א. 0.544

ב. 0.5

שאלה 4

א. 9%

ב. 0.09375

ג. 0.9722

שאלה 8

א. 0.0886

ב. 0.2889

ג. 0.3137

ד. 0.8778

שאלה 9

$$\frac{kp}{1+(k-1)p}$$

## פרק 8 - תלות ואי תלות בין מאורעות

### רקע:

אם מתקיים ש:  $P(B|A) = p(B)$  נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך:  $P(A|B) = p(A)$  כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים

בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח

בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18$$

באופן דומה:

### הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות  $A_1, \dots, A_n$  הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

**תרגילים:**

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?



6. עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:  $P(A \cup B) = 0.9$ ,  $P(A|B) = 0.6$ ,  $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$ . האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7. הוכח אם

$$P(A/B) = P(B/A)$$

אז:

$$P(A) = P(B)$$

8. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- א. אם  $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$  אזי המאורעות בלתי תלויים.  
 ב. מאורע A כלול במאורע B.  $P(A) > 0$ ,  $0 < p(B) < 1$ , לכן  $p(A/B) < p(A)$ .  
 ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.  
 ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו-B מאורעות זרים.  
 ה.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$  לכן A ו-B מאורעות זרים.

**פתרונות :****שאלה 1**

כך

**שאלה 2**

א. 0.28

ב. 0.18

**שאלה 3**

א. 0.0064

ב. 0.1536

**שאלה 4**

א. 0.5904

ב. 0.9984

**שאלה 8**

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

## פרק 9 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
- א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?  
 ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?  
 ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?  
 ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
- א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?  
 ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג?  
 ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א?  
 ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו- "יוצר במחלבה א" בלתי תלויים?
3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:  
 בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג  
 בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה  
 בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
- א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?  
 ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?  
 ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?  
 ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
- ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
- ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
- ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
- ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
- ג. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - נבחר אדם מובטל
- B - נבחר גבר
- האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, ב-B את ההטלה השנייה ראש.
- א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
- ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
- ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?
- ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
- ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
- ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

**פתרונות:****שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

**שאלה 2**

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

**שאלה 3**

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

**שאלה 4**

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

**שאלה 5**

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

**שאלה 6**

א. 0.65

ב. A ו-B תלויים.

ג. 0.5384

**שאלה 7**

א. 8%

ב. 0.733

ג. תלויים.

ד. 1. 0.478

2. 0.15

## פרק 10 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

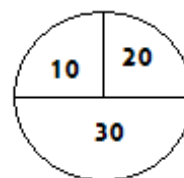
### רקע:

משתנה מקרי בדיד : הנו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות. מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות : פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה.

סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

למשל, בקזינו יש רולטה כמוראה בשרטוט :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד ( פתרון בהקלטה).

## תרגילים:

1. ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה הוא :
  - 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
  - 70 משפחות עם מכונית אחת.
  - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
  - 20 משפחות עם 3 מכוניות .
 בוחרים באקראי משפחה מהישוב, נגדיר את  $X$  להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה.  
 בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
2. מהאותיות  $C, B, A$  יוצרים קוד דו תווי.
  - א. כמה קודים ניתן ליצור?
  - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים
  - ג. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהאות  $B$  מופיעה בקוד, בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי  $X$  מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
4. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ – 4 פעמים. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  
5. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את  $X$  להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .



6. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי  
כלשהו :

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

מצא את ערכו של  $A$ .

**פתרונות****שאלה 3**

2	1	0	x
0.75	0.20	0.05	P(x)

**שאלה 4**

4	3	2	1	x
0.343	0.147	0.21	0.3	P(x)

**שאלה 5**

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	P(x)

**שאלה 6**

10

## פרק 11 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת, שונות וסטיית תקן

רקע:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

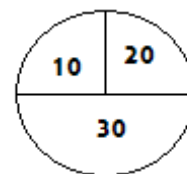
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

**תוחלת** – ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

**שונות** – תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

**סטיית תקן** – שורש של השונות. – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת.

למשל, בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה בש"ח.

30	20	10	x
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5$$

$$= 68.75 = \sigma^2$$

כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

**תרגילים:**

1. אדם משחק במשחק מזל. נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה. להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

$X$	-30	0	20	40
$p(X)$	0.4	0.1	0.3	0.2

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של  $X$ ?

2. בישוב מסוים שני סניפי בנק, בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים של הישוב. ל-40% חשבון בנק בסניף הלאומי של הישוב. ל-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון בנק בישוב. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש חשבון. חשב את  $E(X)$

3. ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות.

נגדיר את  $X$  להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשבו את התוחלת וסטית תקן של  $X$ .

4. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .

5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ :

8	6	4	2	$x$
0.2		0.3		$P(x)$

כמו כן נתון ש:  $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את  $V(X)$ .

6. משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים -5, 0 ו 5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת: 2 שונות: 796

**שאלה 3**

ב. תוחלת: 3.36 סטיית תקן: 1.603

**שאלה 4**

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת: 3

שונות: 2

**שאלה 5**

א.

8	6	4	2	x
0.2	0.1	0.3	0.4	P(x)

ב. 5.16

**שאלה 6**

5	0	-5	x
0.2	0.6	0.2	P(x)

## פרק 12 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

### רקע

מצב שבו מבצעים הכפלה של קבועה ו או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי. ( כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע)

$$Y = aX + b \quad \text{אם}$$

אזי:

$$E(Y) = aE(X) + b$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_x$$

### שלבי העבודה:

5. נוהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית ( שינוי קבוע לכל התצפיות).
6. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
7. נפשט את הכלל ונוהה את ערכי a ו b.
8. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה - הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪ מהי התוחלת והשונוות של הרווח במשחק ?

### פתרון ( בהקלטה)

חישבנו קודם ש :

$$E(X) = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = 68.75 = \sigma^2$$

### תרגילים:

1. סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.
2. תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינו 10 עם שונות 3 הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
3. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
4.  $X$  הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש-  $E(X) = 4$  ו-  $V(X) = 3$ .  
 $Y$  הינו משתנה מקרי חדש עבורו  $Y = 7 - X$ .  
 חשב את:  $E(Y)$  ו-  $V(Y)$ .
5. אדם החליט לבטח את רכבו, שווי רכבו 100,000 ₪.  
 להלן התביעות האפשריות והסתברותן:  
 בהסתברות של 1/1000 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).  
 בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.  
 בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.  
 אחרת אין תביעה בכלל.  
 החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.  
 נסמן ב- $X$  את גובה התביעה השנתית באלפי ₪  
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.  
 ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪, מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?



6. יהי  $X$  מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של  $X$  נתונה בטבלה הבאה:

10	9	8	7	6	5	$X$
		0.3	0.2	0.2	0.1	$P(x)$

7.35. כמו כן נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

- השלימו את פונקציית ההסתברות.
- חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- הציון בבחינה מחושב באופן הבא: כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגוייה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

7. להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:

$$P(X = k) = \frac{k}{A}$$

$$k = 1, 2, \dots, 4$$

- מצא את ערכו של  $A$ .
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.
- חשב את  $E(X^3)$ .
- חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא:  $4 - \frac{X}{2}$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

תוחלת: 14 שונות: 32

**שאלה 2:**

תוחלת: 8 שונות: 12

**שאלה 3:**

תוחלת: 13.2

סטיית תקן : 5.5

**שאלה 4:**

תוחלת: 3

שונות: 3

**שאלה 6:**

ב.  $V(X) = 1.8275$

**שאלה 7:**

א.  $10 = A$

ב.  $E(X) = 3$

$V(X) = 1$

ג.  $E(X^3) = 35.4$

$V(X^3) = 616.84$

ד.  $E(y) = -2.5$

$V(y) = 0.25$

## פרק 13 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

### רקע:

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

למשל,

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכות הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא -2 עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

**תרגילים:**

1. הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונויות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונויות 5. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונויות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

2.  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של  $X$  היא 3. סטיית התקן של  $Y$  היא 4. מהי סטיית התקן של  $X+Y$ ?

3. אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:

$X$  = סכום הזכיה במשחק הראשון.

$Y$  = סכום הזכיה במשחק השני.

נתון:

$$E(x) = 10 \quad \sigma(X) = 3$$

$$E(y) = 12 \quad \sigma(Y) = 4$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכיה בשני המשחקים?

4. ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי וב-10 ₪ רבע כך גם ב- 20 ₪. מה היא התוחלת והשונויות של סכום הזכיה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים.

5. נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X = K) = \frac{A}{K-1} \quad K = 2, 3, 4, 5$$

0                      אחרת

א. מצא את ערכו של  $A$ .

ב. חשב את התוחלת והשונויות של  $X$ .

ג. נלקחו  $n$  משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות  $n$  את תוחלת והשונויות של סכום המשתנים.

**פתרונות:****שאלה 1**

תוחלת: 9

שונות: 15

**שאלה 3**

תוחלת: 22

סטיית תקן: 5

**שאלה 4**

תוחלת: 90

שונות: 275

**שאלה 5**

$$A = \frac{12}{25} = 0.48 \quad \text{א.}$$

ב. תוחלת 2.92

שונות 1.1136

ג. תוחלת  $n \cdot 2.92$ שונות  $n \cdot 1.1136$

## פרק 14 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

### רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:  
 ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון" כמו: מוצר פגום או תקין אדם עובד או מובטל עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.

בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי  $n$  פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את  $X$  להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב  $p$  את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד וב  $q$  את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש:  $X \sim B(n, p)$ .

פונקציית ההסתברות של  $X$ :

$$k = 0, 1, 2, \dots, n; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{לכל}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1; \quad \text{כאשר}$$

לגודל  $\binom{n}{k}$ : ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות}$$

שימו לב כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי  $n$  פעמים.
- (3)  $X$  – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

**דוגמה**: (פתרון בהקלטה)

- במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.
- א. מהי ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

**תרגילים:**

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה.

נגדיר את  $X$  להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.

א. מהי ההתפלגות של  $X$ ?

ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?

ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?

ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?

ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?

ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

2. על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארט-פון. נבחרו 10 אנשים

באקראי. נגדיר את  $X$  כמספר האנשים שנדגמו עם סמארט-פון.

א. מהי ההתפלגות של  $X$ ? הסבירו.

ב. מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?

ג. מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?

ד. מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

3. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪.

ההסתברות לזכות ב-20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה

היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.

א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?

ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?

ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?

ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

4. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.

א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?

ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?



5. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
6. במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה היא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
7. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

**פתרונות:****שאלה 7 :**

- א. 0.401  
 ב. תוחלת : 8.025  
 סטיית תקן : 2.193

**שאלה 2 :**

- ב. 0.2335  
 ג. 0.1493  
 ד. תוחלת : 7  
 סטיית תקן : 1.449

**שאלה 3 :**

- א. 0.5314  
 ב. 0.0984  
 ג. 0.1143  
 ד. תוחלת : -18  
 סטיית תקן : 14.697

**שאלה 4 :**

- א. 0.1789  
 ב. 2

**שאלה 5 :**

- א. 0.1956  
 ב. 0.4253

**שאלה 6 :**

- א. 0.85  
 ב. 0.182  
 ג. תוחלת : 82 נקודות  
 שונות : 91.8 נקודות

## פרק 15 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

### תרגילים:

1. נתון ש:

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של  $X$ .

ב.  $W = 2X - 4$ , חשב את התוחלת וסטיית התקן של  $W$ .

ג.  $T = X + Y$ , חשב את התוחלת של  $T$ . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של  $T$ ?

2. ערך משחק בקזינו בשתי מכוונות הימורים. משחק אחד בכל מכונה (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי

שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערך ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערך?

ג. אם ערך נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערך ינצח

בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את

המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו

שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של  $X$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של  $X$ .

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת

הדלת?

5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור

נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם

60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי  $X$  - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה

יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של  $X$ ?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6. חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל. להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
- הסרט "הצב" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
  - הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.7.
  - הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
- ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.
  - ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?
  - ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

8. מבחן בנוי משני חלקים. בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכוון רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.
- א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?
  - ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?
  - ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?
  - ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9. יהי  $X$  משתנה מקרי המקיים  $E(X) = 2$  וכן  $V(X) = 1$ . חשב  $E(X - 5)^2$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

א. תוחלת: 2

סטיית תקן: 1

ב. תוחלת: 0

סטיית תקן: 2

ג. תוחלת: 4.5

סטיית תקן: לא ניתן

**שאלה 2:**

א. 0.03

ב. תוחלת: 0.15, שונות 0.1875

ג. 0.1328

**שאלה 3:**

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת: 3

שונות: 2

ג. תוחלת: 1.5

שונות: 0.5

**שאלה 5:**

א. 0.375

ג. 0.6

ד. 0.282

**שאלה 6:**

ב. תוחלת : 1.5

שוונות 0.61

ג. תוחלת : 0

סטיית תקן : 4.68

**שאלה 8 :**

א. 2.013

ב. 0.5256

ג. תוחלת : 8

שוונות : 1.6

ד. תוחלת : 10.5

שוונות 3.475

**שאלה 9 :**

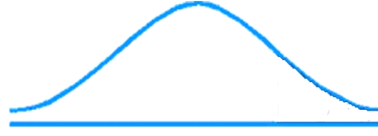
10

## פרק 16 - התפלגות נורמלית

### רקע

התפלגות זו מאפיינת משתנה רציף כמו גובה של אוכלוסייה, משקל של אוכלוסייה, זמן ייצור וכדומה.

בהתפלגות זו רוב האוכלוסייה נמצאת במרכז של ההתפלגות וככל שמתרחקים מהמרכז אחוז המקרים הולך וקטן באופן סימטרי. צורת העקומה של ההתפלגות הנורמלית היא זו:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אם נתון, למשל, שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100, נרשום

$$\mu = 500$$

$$\sigma = 100$$

נתון זה בצורה הבאה:

$$X \sim N(500, 100^2)$$

ובהכללה, נרשום זאת כך:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

השטח שמתחת לעקומה יבטא את ההסתברות או הפרופורציה של המקרים המבוקשים.

כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית כלשהי להתפלגות נורמלית סטנדרטית.

התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן

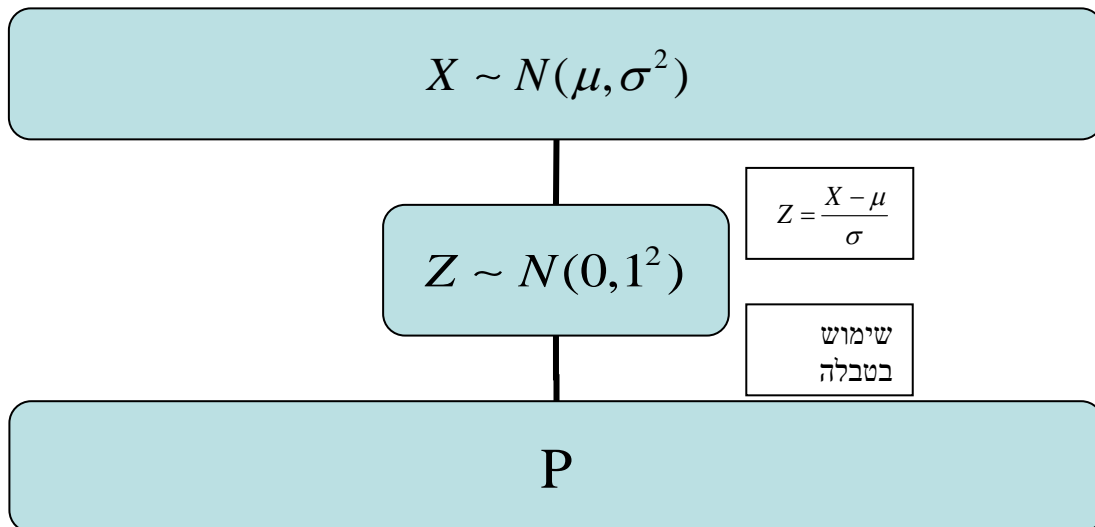
היא אחת והיא תסומן באות  $Z$ .  $Z \sim N(0, 1^2)$

תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה:  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

הערך המתקבל הוא ציון התקן הנותן בכמה סטיות תקן אנו סוטים מהממוצע.

לאחר שמצאנו את ציון התקן נעזר בטבלה שבסופו של דבר תיתן לנו את ההסתברות הרצויה.

באופן כללי נתאר את הסכמה הבאה לתהליך:



**תרגילים:**

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
  - א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
  - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
  - א. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
  - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
  - ג. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
  
2. המשקל של אנשים באוכלוסיה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
  - א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
  - ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
  - ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
  - ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
  - ה. מה אחוז האנשים באוכלוסיה הזו ששוקלים מתחת ל- 140 ק"ג?
  
3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושוונות 225.
  - א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - ג. מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - ד. מהו האחוזון ה- 20?
  - ה. מה הרבעון התחתון?
  
4. אורך חים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חים פחות מ- 544 שעות.
  - א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
  - ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
  - ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
  - ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
  - ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?



5. הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
6. ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?
- ג. אם זו שווה ל \$ 2, מצא את סטיית התקן של ההוצאה החודשית לבית אב בזוים.
- ד. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
7. אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל 2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ 3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ 4 דקות והיתר לא?

**פתרונות:**

<u>שאלה 1</u>		<u>שאלה 2</u>	
א. 89.25%		א. 26.43%	
ב. 2.28%		ב. 89.44%	
ג. 0		ג. 39.44%	
ד.		ד. 0.383	
ד. 50%		ה. 100%	
<u>שאלה 3</u>		<u>שאלה 4</u>	
א. 119.2		א. 500	
ב. 80.8		ב. 100	
ג. 112.6		ג. 0.3446	
ד. 87.4		ד. 733	
ה. 89.95		ה. 267	
<u>שאלה 5</u>		<u>שאלה 6</u>	
א. 0.1587		א. 1925	
ב. 0.0228		ב. 0.2266	
ג. 0.8563		ג. 600	
ד. 0.3975		ד. 0.1587	
<u>שאלה 7</u>			
א. 0.1359			
ב. 0.67			
ג. 100			
ד. 0.25			

## פרק 17 - שאלות אמריקאיות על כל חומר הלימוד

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 1-4

פסיכולוגים צפו במשך שבוע שלם בהתנהגותם של 28 ילדים בגן חובה. לאחר מכן נאלצו לדווח על רמת הביטחון העצמי של כל ילד בסקלה של 1 עד 5. כאשר 5 נחשב לרמת בטחון עצמי גבוהה ו-1 לרמת בטחון עצמי נמוכה. להלן סיכום התוצאות:

מספר הילדים	בטחון עצמי
6	1
7	2
10	3
4	4
1	5

### שאלה 1

מהו סולם המדידה של המשתנה הנחקר?

- א. שמי.
- ב. סדר.
- ג. רווח.
- ד. מנה.

### שאלה 2

מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר כדי לתאר את הנתונים?

- א. טבלת שכיחויות.
- ב. דיאגרמת מקלות.
- ג. היסטוגרמה.
- ד. דיאגרמת עוגה.

### שאלה 3

מהו השכיח של התפלגות הנתונים שנאספו?

- א. 2
- ב. 1
- ג. 3
- ד. 10

**שאלה 4**

התווסף עוד ילד עם רמת בטחון עצמי נמוכה לכן סטיית התקן של המשתנה הנחקר כתוצאה מההוספה:

- א. תגדל
- ב. תקטן
- ג. לא תשתנה
- ד. אין לדעת

**שאלה 5**

אם נרצה לבדוק האם המוצא (אסיה, אירופה, אפריקה, אמריקה) משפיע על ההשכלה בשנים של העובדים נעשה זאת על ידי.

- א. מדד הקשר הלינארי.
- ב. טבלת שכיחות משותפת.
- ג. תרשימי קופסא.
- ד. דיאגרמת פיזור.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 6-10**

להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל בניהן.

**שאלה 6**

לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?

- א. 1
- ב. 2
- ג. 3
- ד. אין לדעת.

**שאלה 7**

לאיזו התפלגות השכיח הגדול ביותר?

- א. 1
- ב. 2
- ג. 3
- ד. אין לדעת

**שאלה 8**

במה התפלגות 1 ו 2 זהות?

- א. בעשירון העליון.
- ב. בממוצע.
- ג. בשונות.
- ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

**שאלה 9**

איזה מהמשפטים הבאים נכון לגבי התפלגות מספר 3?

- א. הממוצע שווה לחציון בהתפלגות.
- ב. הטווח שווה לטווח הבין רבעוני.
- ג. העשירון התחתון שווה לעשירון העליון.
- ד. סטיית התקן היא אפס.

**שאלה 10**

לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?

- א. 1
- ב. 2
- ג. 3
- ד. אין לדעת.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 11-15 :**

מוכר החליט לתת 20% הנחה לכל המוצרים שבחנות שלו.

נסמן ב- X המחיר של מוצר לפני ההנחה בש"ח וב- Y את המחיר של המוצר אחרי ההנחה בש"ח.

המוכר חישב את המדדים הבאים לפני ההנחה :

ממוצע	80
חציון	70
שונות	300
טווח	48

כמו כן הוא חישב גם את כל הנתונים לגבי המשתנה Y.

**שאלה 11**

מה יהיה הממוצע של המחירים בש"ח אחרי ההנחה?

א. 16

ב. 64

ג. 80

ד. 70

**שאלה 12**

מה יהיה טווח המחירים בש"ח אחרי ההנחה?

א. 9.6

ב. 38.4

ג. 48

ד. 70

**שאלה 13**

מה תהיה השונות של המחירים אחרי ההנחה?

א. 300

ב. 60

ג. 240

ד. 192

**שאלה 14**

מהו מקדם ההשתנות (CV) של המחירים לפני ההנחה?

- א. 3.75
- ב. 0.267
- ג. 0.2165
- ד. 4.619

#### שאלה 15

אם המוכר יחשב את מקדם המתאם על  $Y$  ו  $X$  התוצאה שתתקבל תהיה?

- א. 0
- ב. 1
- ג. -1
- ד. אין לדעת.

#### שאלה 16

בהתפלגות אסמטרית ימנית סטיית התקן יותר גדולה מאשר בהתפלגות אסמטרית שמאלית.

- א. הטענה תמיד נכונה.
- ב. הטענה תמיד אינה נכונה בהכרח.
- ג. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

#### שאלה 17

ביחס לציר המספרים רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:

- ו. בערכים הגבוהים.
- ז. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ח. בערכים הנמוכים.
- ט. לא ניתן לדעת.

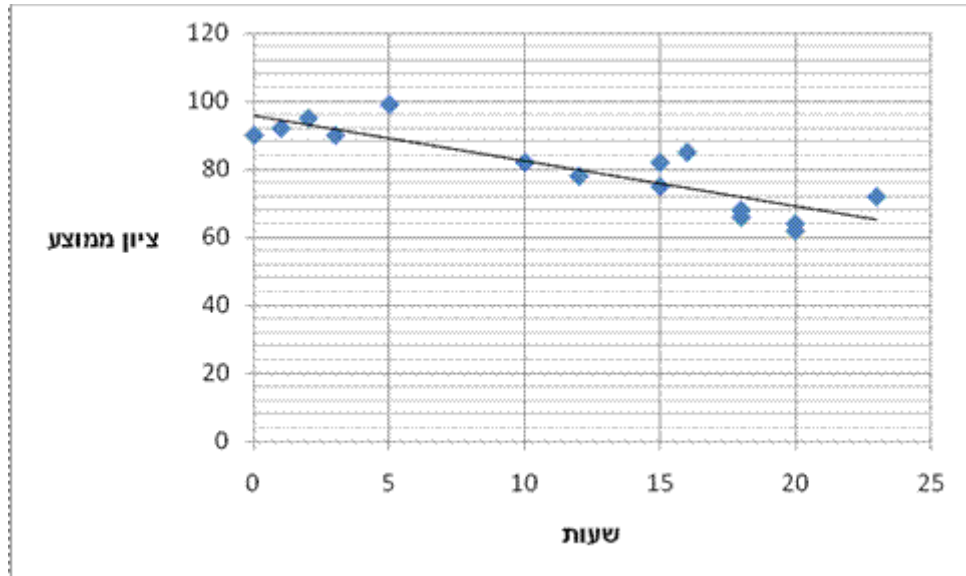
#### שאלה 18

הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

- ה. תגדיל את סטיית התקן.
- ו. תקטין את סטיית התקן.
- ז. לא תשנה את סטיית התקן.
- ח. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 19-21

חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר בעזרת האקסל דיאגרמת פיזור. החוקר אף הוסיף לדיאגרמה את קו המגמה המתאים לנתונים.



### שאלה 19

מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

- ציון ממוצע.
- מספר שעות לבילוי.
- מספר הסטודנטים.

### שאלה 20

מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

(הסתמכו על הנתונים ולא על דעתכם האישית...)

- ככל שמבליים יותר הציון נוטה לרדת.
- אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
- ככל שמבליים פחות הציון נוטה לרדת.
- ככל שהציון יורד הסטודנט מבלה פחות.

### שאלה 21



איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?

א. 0.85

ב. 0.15

ג. -0.85

ד. -0.15

### שאלה 22

סטיית התקן של משתנה מסוים  $X$  הייתה 2. הוחלט לבצע טרנספורמציה למשתנה לפי הקשר הבא:  $Y = 3X - 2$ . שונות  $Y$  אחרי הטרנספורמציה היא:

א. 4

ב. 6

ג. 10

ד. 12

ה. 36

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 23-25

בכיתה 30 סטודנטים אותם 30 נבחנו במבחן באנגלית ובמבחן בסטטיסטיקה. להלן פלט לגבי ציונים:

סטטיסטיקה	אנגלית	
80	90	ממוצע
100	121	שונות

### שאלה 23

באיזה מקצוע להתפלגות הציונים פיזור יחסית יותר גבוה?

א. אנגלית.

ב. סטטיסטיקה

ג. אותו פיזור בשני המקצועות באופן יחסי.

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

### שאלה 24

יערה קיבלה 92 באנגלית ו82 בסטטיסטיקה. באיזה מקצוע היא יותר טובה יחסית לכיתתה?

א. אנגלית.

ב. סטטיסטיקה

ג. אותו דבר יחסית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

### שאלה 25

עודד שקיבל 80 בסטטיסטיקה העתיק בבחינה. הוחלט לחשב מחדש את השונות של הציונים בסטטיסטיקה בלעדיו. השונות החדשה :

- א. תקטן
- ב. תגדל
- ג. לא תשתנה
- ד. אין לדעת

### שאלה 26

חושב הטווח הבין רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס. לכן :

- א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
- ב. סטיית התקן היא אפס.
- ג. ההתפלגות היא סימטרית.
- ד. מצב זה כלל לא יתכן.

### שאלה 27

נתונה התפלגות של משתנה כלשהו.

- א. הטווח של 20% התצפיות הגבוהות ביותר שווה לטווח של 20% התצפיות הנמוכות ביותר.
- ב. הטווח של 50% התצפיות המרכזיות הינו הטווח הבין רבעוני.
- ג. הרבעון העליון שווה לרבעון התחתון.
- ד. הטווח הבין רבעוני הוא מחצית מהטווח.

### הנתונים הבאים מתייחסים לכל השאלות 28-29 :

חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון במבחן הרשות בסטטיסטיקה ומימון לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות : הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

### שאלה 28

על פי משוואת הרגרסיה של שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב :

- א. 1.5 נקודות.
- ב. 0.53 נקודות.
- ג. 0.66 נקודות.
- ד. 1.20 נקודות
- ה. 0.96 נקודות.

**שאלה 29**

על פי משוואת הרגרסיה תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון :

- א. 29.
- ב. 0.
- ג. 33.
- ד. 24.
- ה. 26.

**שאלה 30**

אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא שלילי אזי :

- א. הערכים של המשתנים הם שליליים.
- ב. ככל שמשנתה אחד עולה השני עולה.
- ג. ככל שמשנתה אחד יורד השני יורד.
- ד. קיימת טרנספורמציה לינארית שלילית בין שני המשתנים.
- ה. אף טענה אינה נכונה.

**שאלה 31**

בתיק 10 מניות . בהנחה שהמניות לא תלויות זו בזו והסיכוי שביום מסוים מניה תעלה 0.6. מה סטית התקן של מספר המניות שייעלו ביום מסוים?

- א. 6
- ב. 2.4
- ג. 1.55
- ד. 2.46

**שאלה 32**

הסטטיסטיקאית המפורסמת זהבה טוענת כי כאשר מאורעות E ו-F הינם זרים, ניתן לומר כי הסתברות שמאורע E וגם מאורע F יתקיימו, שווה למכפלת ההסתברות כי מאורע E לבדו יתקיים בהסתברות כי מאורע F לבדו יתקיים (או בכתיב מתמטי  $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$ ) האם זהבה צודקת בטענתה?

- א. לא ניתן לדעת
- ב. לא
- ג. כן
- ד. המונח "מאורעות זרים" לא קיים בסטטיסטיקה
- ה. אף תשובה לא נכונה

**שאלה 33**

ככל שההתפלגות הנורמאלית חדה וצרה יותר במרכז אזי:

- א. השונות שלה יותר גבוהה
- ב. הממוצע שלה יותר גבוה
- ג. היא מייצגת אנשים גבוהים יותר
- ד. השונות שלה נמוכה יותר
- ה. החציון שלה גבוה יותר

**שאלה 34**

נתונה סדרה של  $N$  מדידות שלא כולן זהות.

נניח ששתי מדידות נוספות צורפו לסדרה ושתייהן זהות לממוצע הסדרה. האם וכיצדתשנה הוספת שני הערכים החדשים את שונות הסדרה?

- א. שונות הסדרה תקטן
- ב. שונות הסדרה תגדל
- ג. לא ניתן לדעת, זה תלוי במספר התצפיות
- ד. לא ניתן לדעת, זה תלוי בערכו של הממוצע

**שאלה 35**

הוותק הממוצע של עובדי מפעל מסוים הוא 12 שנים וסטיית התקן של הוותק 8 שנים. בעוד 3 שנים – אם כל העובדים ימשיכו לעבוד במפעל ולא יתווספו עובדים חדשים – נקבל כי:

- א. הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 8 שנים
- ב. הממוצע 12 שנים וסטיית התקן 11 שנים
- ג. הממוצע 15 שנים וסטיית התקן 11 שנים
- ד. הממוצע 12 שנים וסטיית התקן 8 שנים

**שאלה 36**

שני סטודנטים עזבו את החוג לכלכלה. הציון של כל אחד מהם היה שווה לציון הממוצע. כיצד תשפיע עזיבתם על הממוצע ושונות ציוני התלמידים הנותרים? אם הממוצע לפני העזיבה היה 80 והשונות 100.

- א. הממוצע לא ישתנה והשונות תגדל.
- ב. הממוצע לא ישתנה והשונות תקטן.
- ג. הממוצע לא ישתנה והשונות לא תשתנה.
- ד. הממוצע יקטן והשונות תגדל.
- ה. הממוצע יגדל והשונות תקטן.

**שאלה 37**

החציון של סדרת נתונים מסוימת הוא 90. הוסיפו שתי תצפיות נוספות: 100 ו-20, לכן החציון:

- א. יקטן.
- ב. יגדל.
- ג. לא ישתנה.
- ד. לא ניתן לדעת.

**שאלה 38**

סטיית התקן של המשכורות בחברה הנה 3000 ₪ אם נוסיף לכל עובדי החברה 200 ₪ לשכר אז:

- א. סטיית התקן תגדל אך אין לדעת בכמה.
- ב. סטיית התקן תגדל בהכרח ב – 200 ₪.
- ג. סטיית התקן לא תשתנה.
- ד. סטיית התקן תקטן.
- ה. לא ניתן לדעת.

**שאלה 39**

בתיק השקעות 5 מניות. נגדיר את המאורע: אף מניה לא תעלה מחר מבין מניות התיק. המאורע המשלים למאורע זה הוא ( הנח שמניה יכולה או לעלות או לרדת בלבד).

- א. לפחות מניה אחת תעלה.
- ב. לפחות מניה אחת תרד.
- ג. כל המניות יעלו.
- ד. בדיוק מניה אחת תעלה.

**שאלה 40**

ממוצע של סידרת נתונים הנה 50 וסטיית התקן 10. אם נוסיף עוד שתי תצפיות שערכן 50 סטיית התקן:

- א. תקטן.
- ב. תגדל.
- ג. לא תשתנה.
- ד. אין לדעת.

**שאלה 41**

בהתפלגות אסימטרית עם זנב ימני ציון התקן של הרבעון התחתון:

- א. בהכרח שלילי.
- ב. בהכרח חיובי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת.

## שאלה 42

אם השונות של המשתנה שווה אפס. מה ניתן לומר על המשתנה?  
 א. עולה. ב. יורד. ג. קבוע. ד. נורמלי. ה. לא ניתן לדעת

## שאלה 43

נתון משתנה מקרי  $W$  עם שונות 10.  
 מה תהיה השונות אם נכפיל את ערכי המשתנה  $W$  פי 2?  
 א. 20. ב. 10. ג. 400. ד. 40. ה. 0

## שאלה 44

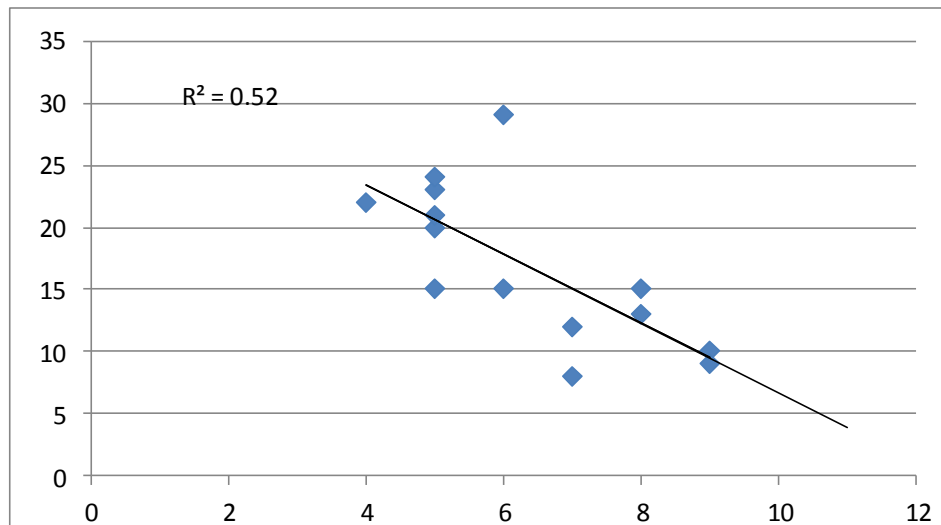
נמצא שקיים מקדם מתאם חיובי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:  
 א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו חיוביים.  
 ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.  
 ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.  
 ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

## שאלה 45

נתונים שני מאורעות המקיימים:  $P(A) = 0.45$   $P(B) = 0.5$   $P(A \cup B) = 0.95$   
 איזו טענה נכונה לגבי המאורעות הללו?  
 א. המאורעות בלתי תלויים.  
 ב. המאורעות זרים.  
 ג. המאורע  $B$  מכיל את המאורע  $A$ .  
 ד. המאורעות משלימים.

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 46-48

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים X (משתנה בלתי תלוי-בציר האופקי) ו-Y (משתנה תלוי), כמו כן הועבר קו הרגרסיה וחושב ריבוע מקדם המתאם.



#### שאלה 46

לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של מקדם המתאם שתופעל על הנתונים?

- א. 0.52
- ב. -0.52
- ג. -0.72
- ד. 0.72

#### שאלה 47

מה תהיה התוצאה הכי מתאימה לפרמטר סברגרסיה?

- א. 0.52
- ב. 2.79
- ג. -2.79
- ד. -0.52

#### שאלה 48

מהו טווח התפלגות התצפיות של המשתנה הבלתי תלוי X?

- א. 5
- ב. 12
- ג. 6.5
- ד. 7

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 49-51**

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית ( מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים :

מספר פועלים	תפוקה	
15	48	ממוצע
2	10	סטיית תקן

**שאלה 49**

איזו טענה מהטענות הבאות נכונה?

- המספר המקסימלי של העובדים במפעל הוא 17 עובדים.
- התפוקה הכוללת במשך ה- 40 ימים הללו הייתה 192,000 מצברים.
- הטווח של התפלגות תפוקת המצברים הוא 20 מאות.
- אף אחת מהטענות לא נכונה.

**שאלה 50**

לפי קריטריון CV (מקדם ההשתנות)

- הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.
- הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.
- הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.
- אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

**שאלה 51**

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.

מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים?

- חריגים באותה מידה.
- כמות הפועלים.
- התפוקה.
- חסרים נתונים כדי לדעת זאת.



**שאלה 52**

התפלגות הציונים במבחן מסוים היא סימטרית לכן :

- א. סטיית התקן של הציונים היא אפס.
- ב. הציון החציוני שווה לציון הממוצע.
- ג. העשירון העליון שווה לעשירון התחתון של הציונים.
- ד. כל הטענות בשאר הסעיפים לא נכונות.

**שאלה 53**

מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7 . אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, אזי מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה של 10 המשפחות הנ"ל:

- א. לא ישתנה ויישאר 0.7.
- ב. יהפוך להיות 0.7 - .
- ג. אין מספיק נתונים כדי לדעת מה יהיה מקדם המתאם.
- ד. אפשר לדעת רק מה יהיה מקדם המתאם באוכלוסייה כולה.
- ה. בין 0.7 ל- 0.7.

**שאלה 54**

איזה מהמשפטים הבאים אינו נכון?

- א. אם מוסיפים קבוע לתצפיות הדבר לא משפיע על פיזור הנתונים.
- ב. בהתפלגות סימטרית הממוצע שווה לשכיח.
- ג. אם כל התצפיות זהות סטיית התקן בהכרח אפס.
- ד. הכפלה בקבוע משנה את סטיית התקן.

**שאלה 55**

איזה מהמשפטים הבאים נכון?

- א. הטווח הבין רבעוני הוא אפס רק אם כל הצפיות זהות.
- ב. הרבעון העליון שווה לרבעון התחתון בהתפלגות סימטרית.
- ג. בהתפלגות סימטרית החציון שווה לממוצע.
- ד. 90% מהתצפיות נמצאות מעל האחוזון התשעים.

**שאלה 56**

מעוניינים למצוא את הסיכוי לאיחוד שני מאורעות. מותר לחבר הסתברויות אלה בשביל זה, רק אם המאורעות:

- א. זרים.
- ב. לא זרים
- ג. תלויים
- ד. בלתי תלויים

**שאלה 57**

במכון לשיטפת מכוניות זמן שטיפת המכונית מתפלג נורמלית עם תוחלת של 25 דקות וסטיית תקן של 5 דקות. מחיר שטיפת מכונית הוא 40 ₪ אם זמן שטיפת המכונית הוא עד 25 דקות. אם זמן שטיפת המכונית עובר את 25 הדקות משלמים 20 שקלים בלבד. עידן הכניס את המכונית לשיטפה. מהי תוחלת התשלום של השיטפה?

- א. 30 ₪
- ב. 32.5 ₪
- ג. 35 ₪
- ד. 25 ₪
- ה. לא ניתן לחשב ללא נתונים נוספים

**שאלה 58**

הכפלה בגודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים.

- א. תגדיל את סטיית התקן.
- ב. תקטין את סטיית התקן.
- ג. לא תשנה את סטיית התקן.
- ד. לא ניתן לדעת.

**שאלה 59**

בעיר "חולית", בקיץ, כמות הגשם היורד בחודש מתפלג נורמלית עם תוחלת 10 מ"מ וסטיית התקן 2, ובחורף עם תוחלת 10 מ"מ וסטיית התקן 3. איפה יש יותר סיכוי שירד יותר מ 12 מ"מ גשם?

- א. בקיץ
- ב. בחורף
- ג. סיכוי שווה.
- ד. לא ניתן לדעת.

**שאלה 60**

בהתפלגות שבה המאון ה-40 שווה לממוצע. ציון התקן של הממוצע יהיה :

- א. חיובי.
- ב. שלילי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת.

**פתרונות:**

ב	51	א	41	ג	31	ג	21	ב	11	ב	1
ב	52	ג	42	ב	32	ה	22	ב	12	ב	2
א	53	ד	43	ד	33	ב	23	ד	13	ג	3
ב	54	ב	44	א	34	ב	24	ג	14	א	4
ג	55	ב	45	א	35	ב	25	ב	15	ג	5
א	56	ג	46	א	36	א	26	ג	16	ג	6
א	57	ג	47	ג	37	ב	27	ג	17	ג	7
ד	58	א	48	ג	38	ד	28	ג	18	ב	8
ב	59	ב	49	א	39	א	29	ב	19	א	9
ג	60	ב	50	א	40	ה	30	א	20	א	10